Zastosowania geometryczne i fizyczne całek podwójnych i potrójnych

Anna Bahyrycz

Uwaga 1

Objętość bryły V położonej nad obszarem regularnym $D \subset \mathbb{R}^2$ i ograniczonej
z dołu i z góry wykresami funkcji ciągłych $z = d(x,y)$ i $z = g(x,y)$

$$|V| = \iint_D \left[g(x,y) - d(x,y)\right] dxdy.$$

Zastosowania całek podwójnych i potrójnych w geometrii

1. Pole obszaru regularnego $D \subset \mathbb{R}^2$

$$|D| = \iint_D dxdy.$$

2. Pole płata S, który jest wykresem funkcji $z = f(x,y)$ gdzie $(x,y) \in D$ obszaru regularnego

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

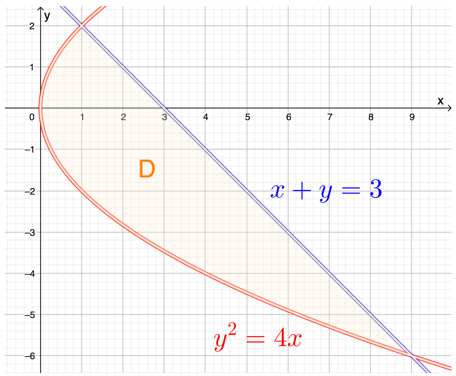
3. Objętość obszaru regularnego $U \subset \mathbb{R}^3$

$$|U| = \iiint_U dxdydz.$$

Przykład 1

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$y^2 = 4x \quad i \quad x + y = 3.$$

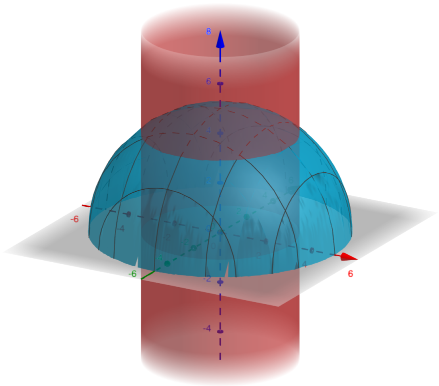


$$|D| = \iint_D dxdy = \int_{-6}^{2}\Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx\Big)dy = \int_{-6}^{2}\Big(3-y-\frac{y^2}{4}\Big)dy = \Big[3y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\Big]_{-6}^{2} = 21\frac{1}{3}$$

Przykład 2

Obliczyć pole powierzchni fragmentu półsfery

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \text{ wyciętego walcem } x^2 + y^2 = 9.$$



Przykład 2 c.d.

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy, \quad f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2},\ D = K\big((0,0),3\big)$$

Ponieważ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$, więc

$$|S| = \iint_{K\left((0,0),3\right)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

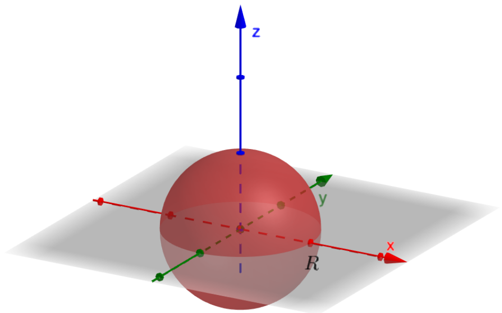
$$\iint_{K\left((0,0),3\right)} \sqrt{\frac{25}{25 - x^2 - y^2}} = \iint_{K\left((0,0),3\right)} \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} =$$

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{5\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}}\, d\varphi d\rho = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^3 \frac{5\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}}\, d\rho\right) = 2\pi \int_0^3 \frac{5\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}}\, d\rho$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 25 - \rho^2 \\ dt = -2\rho\, d\rho \end{array} \right| = -5\pi \int_{25}^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -10\pi \sqrt{t}\Big|_{25}^{16} = -10\pi(4 - 5) = 10\pi.$$

Przykład 3

Korzystając z całki potrójnej wyprowadź wzór na objętość kuli o promieniu R.



$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq & r & \leq R \\ 0 \leq & \varphi & < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq & \psi & \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

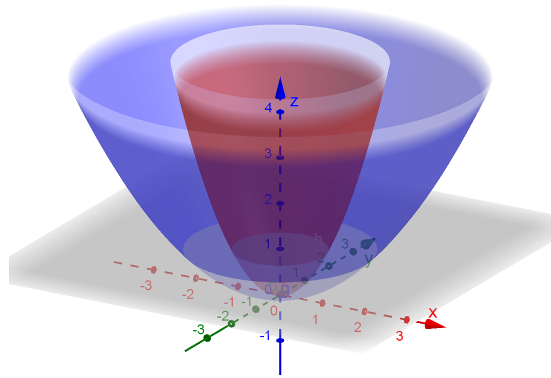
$$|K\big((0,0,0),R\big)| = \iiint_{K\left((0,0,0),R\right)} dxdydz = \iiint_\Omega r^2 \cos\psi\, drd\varphi d\psi$$

$$\left(\int_0^R r^2\, dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi\right) = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2\pi \cdot \sin\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Przykład 4

Obliczyć objętość obszaru V ograniczonego powierzchniami

$$z = x^2 + y^2,\ \ 4z = x^2 + y^2 \ \wedge\ z = 1.$$



Przykład 4 c.d. sposób 1

$$V = V_1 - V_2, \quad \text{gdzie } V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{4} \le z \le 1\}$$
$$\text{i } V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le & \rho & \le 2 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\rho^2}{4} \le & h & \le 1 \end{cases} \qquad \Omega_2 : \begin{cases} 0 \le & \rho & \le 1 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \rho^2 \le & h & \le 1 \end{cases}$$

$$|V_1| = \iiint_{V_1} dxdydz = \iiint_{\Omega_1} \rho\, dhd\varphi d\rho = \int_0^2 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\rho^2}{4}}^1 \rho\, dh \Big] d\varphi \Big\} d\rho$$
$$= \int_0^2 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\rho - \frac{\rho^3}{4} \Big] d\varphi \Big\} d\rho = 2\pi \Big[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4 \Big]_0^2 = 2\pi$$

$$|V_2| = \iiint_{V_2} dxdydz = \iiint_{\Omega_2} \rho\, dhd\varphi d\rho = \int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\rho^2}^1 \rho\, dh \Big] d\varphi \Big\} d\rho$$
$$= \int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\rho - \rho^3 \Big] d\varphi \Big\} d\rho = 2\pi \Big[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \Big]_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$|V| = |V_1| - |V_2| = 2\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Przykład 4 c.d. sposób 2

$$V = V_1' + V_2', \quad \text{gdzie } V_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1 \ \wedge \ \frac{x^2+y^2}{4} \le z \le x^2+y^2\}$$
$$\text{i } V_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 2 \ \wedge \ \frac{x^2+y^2}{4} \le z \le 1\}$$

$$\Omega_1' : \begin{cases} 0 \le & \rho & \le 1 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\rho^2}{4} \le & h & \le \rho^2 \end{cases} \qquad \Omega_2' : \begin{cases} 1 \le & \rho & \le 2 \\ 0 \le & \varphi & < 2\pi \\ \frac{\rho^2}{4} \le & h & \le 1 \end{cases}$$

$$|V_1'| = \iiint_{V_1'} dxdydz = \iiint_{\Omega_1'} \rho\, dhd\varphi d\rho = \int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\rho^2} \rho\, dh \Big] d\varphi \Big\} d\rho$$
$$= \int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\frac{3}{4}\rho^3 \Big] d\varphi \Big\} d\rho = 2\pi \Big[\frac{3}{16}\rho^4 \Big]_0^1 = \frac{3}{8}\pi$$

$$|V_2'| = \iiint_{V_2'} dxdydz = \iiint_{\Omega_2'} \rho\, dhd\varphi d\rho = \int_1^2 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\frac{\rho^2}{4}}^1 \rho\, dh \Big] d\varphi \Big\} d\rho$$
$$= \int_1^2 \Big\{ \int_0^{2\pi} \Big[\rho - \frac{\rho^3}{4} \Big] d\varphi \Big\} d\rho = 2\pi \Big[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^4 \Big]_1^2 = 2\pi\Big(1 - \frac{7}{16}\Big) = \frac{9}{8}\pi$$

$$|V| = |V_1'| + |V_2'| = \frac{3}{8}\pi + \frac{9}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Zastosowania całek podwójnych w fizyce

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem regularnym o gęstości powierzchniowej masy σ.

1. Masa obszaru D
$$M = \iint_D \sigma(x,y)\, dxdy.$$
2. Momenty statyczne względem os Ox i Oy obszaru D
$$MS_x = \iint_D y\sigma(x,y)\, dxdy, \quad MS_y = \iint_D x\sigma(x,y)\, dxdy.$$
3. Współrzędne środka masy obszaru D
$$x_C = \frac{MS_y}{M}, \qquad y_C = \frac{MS_x}{M}.$$
4. Momenty bezwładności względem osi $0x$, Oy i punktu $O = (0,0)$ obszaru D
$$I_x = \iint_D y^2\sigma(x,y) dxdy, \ \ I_y = \iint_D x^2\sigma(x,y) dxdy, \ \ I_O = \iint_D (x^2+y^2)\sigma(x,y) dxdy.$$

Zastosowania całek potrójnych w fizyce

Niech $U \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem regularnym o gęstości objętościowej masy γ.

1. Masa obszaru U
$$M = \iiint_U \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$
2. Momenty statyczne względem płaszczyzn układu współrzędnych obszaru U
$$MS_{xy} = \iiint_U z\gamma(x,y,z)\, dxdydz, \quad MS_{xz} = \iiint_U y\gamma(x,y,z)\, dxdydz,$$
$$MS_{yz} = \iiint_U x\gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$
3. Współrzędne środka masy obszaru U
$$x_C = \frac{MS_{yz}}{M}, \qquad y_C = \frac{MS_{xz}}{M}, \qquad z_C = \frac{MS_{xy}}{M}.$$
4. Momenty bezwładności względem osi $0x$ i punktu $O = (0,0,0)$ obszaru U
$$I_x = \iiint_U (y^2+z^2)\gamma(x,y,z) dxdydz, \ \ I_O = \iiint_U (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z) dxdydz.$$